



نام آزمون: مثلثات مرور سریع ۱

تلفن سبقت: ۰۵۱۳۸۱۱۷

سایت: SEBGHATEBARTAR.COM

۱) اگر انتهای کمان α در ناحیه ی اول باشد عبارت $\sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$ برابر کدام است؟

- ① $-\tan \alpha$ ② $-\cot \alpha$ ③ $\tan \alpha$ ④ $\cot \alpha$

۲) اگر $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ باشد، حاصل عبارت $\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right)$ کدام است؟

- ① $-\cos^2 x$ ② $-\cos x$ ③ $\cos^2 x$ ④ $\cos x$

۳) اگر $\tan \alpha = \frac{2}{3}$ باشد مقدار $\frac{\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \cos(\alpha - \pi)}$ کدام است؟

- ① ۵ ② ۱ ③ -۳ ④ -۴

۴) اگر $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{2}$ باشد، مقدار $\tan(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2})$ کدام است؟

- ① -۲ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ ۲

۵) اگر $\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}$ باشد کم ترین مقدار $\frac{1 - \tan^2(45 - \alpha)}{1 + \tan^2(45 - \alpha)}$ کدام است؟

- ① $\frac{1}{2}$ ② ۱ ③ $-\sqrt{2}$ ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$



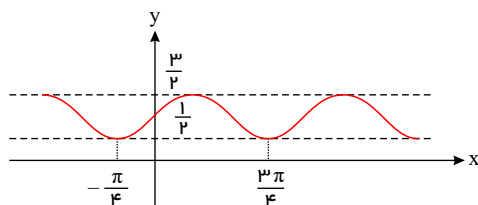
۶ حاصل عبارت $\sin x \cos x (1 - 2 \sin^2 x)$ به ازای $x = 75^\circ$ کدام است؟

$\frac{3}{16}$ (۴)

$\frac{3}{8}$ (۳)

$\frac{1}{8}$ (۲)

$\frac{1}{4}$ (۱)



۷ شکل روبه‌رو، نمودار تابع $y = 1 + a \sin bx \cos bx$ است. $a + b$ کدام است؟

$\frac{3}{2}$ (۲)

۱ (۱)

۳ (۴)

۲ (۳)

۸ دوره تناوب تابع با ضابطه $f(x) = \tan(\pi x) - \cot(\pi x)$ کدام است؟

π (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

$\frac{1}{2}$ (۱)

۹ جواب کلی معادله مثلثاتی $\cos^3 x + \cos x = 0$ با شرط $\cos x \neq 0$ کدام است؟

$x = k\pi + \frac{\pi}{4}$ (۴)

$x = k\pi - \frac{\pi}{4}$ (۳)

$x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$ (۲)

$x = \frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ (۱)

۱۰ مجموع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}$ در بازه $[0, 2\pi]$ ، کدام است؟

4π (۴)

$\frac{7\pi}{2}$ (۳)

3π (۲)

$\frac{5\pi}{2}$ (۱)

۱۱ اندازه‌ی دو قطر از متوازی‌الاضلاع ۱۲ و $8\sqrt{3}$ واحد است. این دو قطر با زاویه‌ی 60° درجه متقاطع هستند. مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

۷۲ (۴)

۶۴ (۳)

۵۴ (۲)

۴۸ (۱)



پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۱

می‌دانیم: $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \cot^2 \alpha} &= \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} = \frac{1}{\sin \alpha} \\ \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} &\stackrel{\text{در مزدوج مخرج ضرب و تقسیم می‌کنیم}}{=} \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}{(1 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{1 - \cos^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin^2 \alpha}} \\ &= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \\ \text{پس: } \sqrt{1 + \cot^2 \alpha} - \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} &= \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \cot \alpha \end{aligned}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۲ می‌دانیم که $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ است و چون $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ است انتهای کمان در ناحیه دوم دایره مثلثاتی است.

$$\frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x \right) = \frac{\tan x}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}}} \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} \right) = \frac{\tan x}{\frac{1}{|\cos x|}} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) = - \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) (\cos x) \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) = -\cos^2 x$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha, \quad \sin(3\pi + \alpha) = \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \cos(\alpha - \pi) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\frac{\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(3\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \cos(\alpha - \pi)} = \frac{-\cos \alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$$

$$\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 5$$

تک تک جملات را بر $\cos \alpha$ تقسیم می‌کنیم

۱ ۲ ۳ ۴ ۴

می‌دانیم: $1 + \cos u = 2 \cos^2 \frac{u}{2}$
 $\sin u = 2 \sin \frac{u}{2} \cos \frac{u}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} &= \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \\ \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) &= -\cot \frac{\alpha}{2} = \frac{-1}{\tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2 \end{aligned}$$

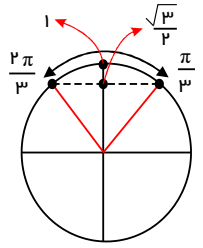
۱ ۲ ۳ ۴ ۵

می‌دانیم: $\frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \cos 2\alpha$

$$\frac{1 - \tan^2(45^\circ - \alpha)}{1 + \tan^2(45^\circ - \alpha)} = \cos 2(45^\circ - \alpha) = \cos(90^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha$$



$$\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3} \leq 2\alpha \leq \frac{2\pi}{3}$$



مقدار سینوس در این بازه از $\frac{\sqrt{3}}{2}$ تا ۱ متغیر است که کم‌ترین مقدار آن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۶

می‌دانیم: $\sin u \cdot \cos u = \frac{1}{2} \sin 2u$, $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$

$$\sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{6} (1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} \times \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}$$

و $T = \frac{2\pi}{|b|}$ دوره تناوب $y = a \sin bx + c$ می‌دانیم در تابع $y = 1 + \frac{a}{2} \sin 2bx$ است پس $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ که می‌دانیم ۱ ۲ ۳ ۴ ۷

است. $Max = |a| + c$

$$Max = \frac{3}{2} \rightarrow \left| \frac{a}{2} \right| + 1 = \frac{3}{2} \rightarrow \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{1}{2} \rightarrow a = \pm 1$$

چون فاصله دو مینیمم متوالی، دوره تناوب اصلی منحنی است، پس:

$$T = \frac{2\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi \rightarrow \frac{2\pi}{|2\pi|} = \pi \rightarrow |b| = 1 \rightarrow b = \pm 1$$

چون شکل داده شده فرمت سینوس است پس a, b هم علامتند، یعنی:

$$a = 1 \rightarrow b = 1 \rightarrow a + b = 2 \text{ یا } a = -1 \rightarrow b = -1 \rightarrow a + b = -2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸ می‌دانیم $\cot \alpha - \tan \alpha = 2 \cot 2\alpha$ است.

پس: $f(x) = -(\cot \pi x - \tan \pi x) = -2 \cot 2\pi x = \frac{-2}{\tan 2\pi x}$

می‌دانیم دوره تناوب $y = \tan bx$ برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ است بنابراین $T = \frac{\pi}{2}$ می‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$\cos 3x + \cos x = 0 \rightarrow \cos 3x = -\cos x \rightarrow \cos 3x = \cos(\pi - x)$$

$$\cos x = \cos \alpha \rightarrow x = 2k\pi \pm \alpha \rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow 4x = 2k\pi + \pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \\ 3x = 2k\pi - \pi + x \rightarrow 2x = 2k\pi - \pi \rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

توجه کنید چون $\cos x \neq 0$ است پس جواب $x = k\pi - \frac{\pi}{2}$ قابل قبول نمی‌باشد.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰ می‌دانیم $\sin^4 a + \cos^4 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a$ است.

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2 2x = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4} \\ \sin 2x = -1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{مجموع جواب‌ها} = \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} = 4\pi$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱ مساحت هر چهار ضلعی از نصف حاصل ضرب دو قطر در سینوس زاویه‌ی بینشان به دست می‌آید.

$$S = \frac{1}{2} (12)(8\sqrt{3})(\sin 60^\circ) = (48\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 24 \times 3 = 72$$

پاسخنامه کلیدی

۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴

۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴

۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴

۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴